Il ramo principale del logaritmo (per esercizi)

Una rappresentazione regolare delle coordinate polari in $\mathbb{R}^2$

Sia

$$\Omega_0 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid y = 0 \text{ e } x < 0\} = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \operatorname{Im} z = 0 \text{ e } \operatorname{Re} z < 0\},$$

e si definiscano le seguenti funzioni su Ω_0 :

$$\begin{aligned} r(x, y) &:= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi(x, y) &:= \operatorname{Arctan} \frac{y}{r(x, y) + x}, \end{aligned} \quad (1)$$

dove

$$x \in \mathbb{R} \mapsto t = \operatorname{Arctan} x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

è il ramo principale dell'arcotangente, ossia, la funzione inversa della funzione

$$t \in (-\pi/2, \pi/2) \mapsto x = \tan t.$$

Esercizio 1 (i) Dimostrare che r e φ sono $C^\infty(\Omega_0)$ e che, se¹

$$\theta(x, y) := 2\varphi(x, y),$$

allora,

$$(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right), \quad \forall (x, y) \in \Omega_0, \quad (2)$$

dove $\theta = \theta(x, y)$ e $r = r(x, y)$.

(ii) Dimostrare che la mappa ϕ definita da

$$\phi : (r, \theta) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \mapsto \phi(r, \theta) := (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \in \Omega_0, \quad (3)$$

(ovviamente C^∞) è invertibile con inversa

$$\phi^{-1} : (x, y) \in \Omega_0 \mapsto (r(x, y), \theta(x, y)) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi). \quad (4)$$

Il ramo principale del logaritmo complesso

Con la solita identificazione $z = (x, y) = x + iy$, sia

$$\operatorname{Log} : z \in \Omega_0 \mapsto \operatorname{Log} z := \log r(z) + i\theta(z) \in \Sigma := \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \pi\}, \quad (5)$$

dove $\log r$ è il comune logaritmo reale (inversa di $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in (0, +\infty)$). La parte immaginaria di $\operatorname{Log} z$, ossia, la funzione $\theta(z)$, viene anche chiamata l'**argomento principale** di z e a volte si denota con $\operatorname{Arg} z$.

¹La funzione θ è la cosiddetta funzione atan2: vedi <https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2>.

Esercizio 2 (i) Verificare che $\text{Log } z$ è olomorfa su² Ω_0 .

(ii) Verificare che $z \in \Omega_0 \mapsto \text{Log } z$ è iniettiva, che $\text{Log}(\Omega_0) = \Sigma$ e che

$$e^{\text{Log } z} = z, \quad \forall z \in \Omega_0.$$

(iii) Verificare che

$$\frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \Omega_0, \quad (6)$$

ossia, che $\text{Log } z$ è una primitiva di $1/z$ su Ω_0 .

Altri rami del logaritmo complesso

Esercizio (facile): Si fissi $\theta_0 \in (-\pi, \pi)$ e sia

$$\Omega_{\theta_0} := \mathbb{R}^2 \setminus \{-re^{i\theta_0} \mid r > 0\},$$

e si definisca su Ω_{θ_0} un ramo del logaritmo complesso

$$\text{Log}_{\theta_0} : \Omega_{\theta_0} \rightarrow \Sigma_{\theta_0} := \mathbb{R} \times \{\theta \mid |\theta - \theta_0| < \pi\},$$

tale che Log_{θ_0} sia iniettiva e suriettiva e si abbia

$$\begin{cases} e^{\text{Log}_{\theta_0} z} = z, \\ \frac{d}{dz} \text{Log}_{\theta_0} z = \frac{1}{z}, \end{cases} \quad \forall z \in \Omega_{\theta_0}.$$

²Suggerimento: si usino le equazioni di Cauchy-Riemann.